

前 言

高等数学是高等院校大多数专业必修的一门重要基础课,该课程在自然科学、工程技术和经济管理等领域有着广泛的应用。通过对该课程的学习,学生能够掌握高等数学的基本理论和基本方法,对自身能力的培养(如逻辑推理能力、抽象思维能力)和数学素养的提高也有着重要的作用,并且为一些后续课程的学习及在各个领域进行理论研究和实践工作提供必要的保证。

本书根据高等教育数学课程的基本教学要求,结合作者多年的教学实践、教学改革经验,以及课程思政的要求,遵循以应用为目的,以“易学、必需、够用”为原则编写而成的。

本书按照党的二十大精神和习近平新时代中国特色社会主义思想的科学体系,撰写了高等数学课程思政导论,通过高等数学的学习,有机融入社会主义核心价值观、中华优秀传统文化教育,特别是中国特色社会主义的“四个自信”(道路自信、理论自信、制度自信、文化自信)教育的内容。

本书在内容的安排上具有以下特点:

(1) 结构严谨,由浅入深、循序渐进、通俗易懂,努力突出高等数学的基本思想和方法。一方面,使学生能够较好地了解各部分的内在联系,从总体上把握高等数学的思想方法;另一方面,培养学生的基本计算能力和严密的逻辑思维能力。

(2) 简明实用。以提出问题或简单实例引入概念,力求深入浅出、通俗简单、难点分散;删去了一些烦琐的理论证明;引导学生理解概念的内涵和外延,培养学生用高等数学的思想和方法分析与解决实际问题的能力。

(3) 叙述通俗易懂、语言简单明快、注意前后联系,使知识结构从逻辑上严密自然,恰当掌握其深度与广度,适于本科各专业使用,同时照顾到高职高专等不同层次的需求。

(4) 主要包括高等数学课程思政导论、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程等内容。各节后附有适量的习题,书后附有习题答案。

本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材,并得到了天津财经大学和国防工业出版社的鼎力相助,在此一并表示衷心感谢!

参与本书编写和提供帮助的还有姜铭久、王友雨、冀有虎、马薇、李永平、李自立、孙志慧、平国庆、孙丛丛等同志。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免有不妥之处,错误亦在所难免,希望读者批评指正。

编者

2023年5月

目 录

第一章 高等数学课程思政导论	1
1.1 高等数学中的科学辩证法——马克思《数学笔记》原著研读	1
一、习近平总书记关于马克思数学成就和科学方法论的重要论述	2
二、马克思《数学笔记》是马克思主义科学方法论的重要内容	2
三、马克思创作《数学笔记》的灵感来源	3
四、剖析微积分概念定理及经济学中蕴含的辩证唯物主义思想	3
1.2 高等数学中的数学文化内容与价值	4
一、凝练数学文化,实现数学文化与创新精神同频共振	4
二、数学文化的特征与辐射	5
1.3 数学中的中国传统文化	7
一、中国古代光辉的数学成就	7
二、中华民族命运共同体——中国古代著名数学家简介	8
第二章 函数、极限与连续	11
2.1 函数	11
一、函数的概念	11
二、函数的定义域	13
三、函数的几种特性	15
四、几种常用特殊函数	19
五、基本初等函数与初等函数	22
六、常见的经济函数	23
七、常见不等式和三角函数公式	24
习题 2.1	27
2.2 数列极限	28

第一章 高等数学课程思政导论

高校立身之本在于立德树人,党的二十大报告指出:“坚持为党育人、为国育才,全面提高人才自主培养质量,着力造就拔尖创新人才,聚天下英才而用之。”数学既是语言也是文化,既是科学基础也是创新工具,它有重大的现实意义,可以说社会的每一次重大进步背后都有数学作为强有力的支撑。从某种意义上说,数学上的突破,往往会带动很多其他相关学科的重大突破。

本章按照习近平新时代中国特色社会主义思想的科学体系,通过高等数学的学习,有机融入社会主义核心价值观、中华优秀传统文化教育,特别是中国特色社会主义的“四个自信”(道路自信、理论自信、制度自信、文化自信)教育的内容。在高等数学课程知识中融入课程思政元素,强调主流价值引导与思政课程同向同行,形成协同效应;实现知识传授与价值引导的有机统一,引导“借助于鱼,学会去捕鱼”,即把落脚点放在能力与素质的提高上。通过数学思想方法培养创新能力和熏陶科学素质,进而从僵固的知识发掘出灵活的能力,使知识成为能力的载体,用无形的能力牵导和带动对有形知识的掌握和理解,使能力成为知识大厦的向导。

本章重视习近平新时代中国特色社会主义思想和马克思主义科学方法论对高等数学的引领和渗透,瞄准“顶天立地”模式,寻求已知和未知的联系,真正掌握所学的数学知识。这样有利于在高等数学学习的早期就能使学生接受初步的数学建模和实践课题,启发创造性思维,提高分析问题、解决问题的能力。

在高等数学的学习过程中,深入领会党的二十大精神,深刻领悟过去五年工作和新时代十年伟大变革,深刻领悟“两个确立”的决定性意义,深刻领悟习近平新时代中国特色社会主义思想的世界观和方法论,深刻领悟以中国式现代化全面推进中华民族伟大复兴的使命任务,深刻领悟以伟大自我革命引领伟大社会革命的重要要求,深刻领悟团结奋斗的时代要求,不断增强“四个意识”,坚定“四个自信”,坚决做到“两个维护”、坚决捍卫“两个确立”。从高等数学自身特点和人文角度思考,瞄准“顶天立地”模式有两层含义:一是在探究式学习和创新性思考方面的顶天立地;二是注重基础、勤于做题的立地与理念高远的顶天。

1.1 高等数学中的科学辩证法——马克思《数学笔记》原著研读

党的二十大报告深刻阐述了习近平新时代中国特色社会主义思想的世界观和方法论,即“六个必须坚持”,深刻揭示了这一科学思想的理论品格和鲜明特质,牢牢把握习近平新时代中国特色社会主义思想的世界观和方法论,是学习贯彻党的二十大精神的重要遵循。根据《习近平总书记在纪念马克思诞辰200周年大会上的重要讲话》和《习近平总书记到北京大学考察时的重要讲话》,研读马克思《数学笔记》,读原著、学原文、悟原理,演示创新线、寻

求创新点,提出马克思主义科学方法论是青年师生为人做学的必修课,更是升华观念、提高大学生创新能力和师德建设的重要途径.探索马克思《数学笔记》中的“术与道、创新、法与史”,提出当代大学生应学习马克思具备知识探索者的素质,以做人为基点、做学问为途径,掌握习近平新时代中国特色社会主义思想和马克思主义科学方法论.

一、习近平总书记关于马克思数学成就和科学方法论的重要论述

2018年5月4日,习近平总书记在纪念马克思诞辰200周年大会上发表重要讲话时指出:“马克思主义理论的科学性和革命性源于辩证唯物主义和历史唯物主义的科学世界观和方法论,为我们认识世界、改造世界提供了强大思想武器,为世界社会主义指明了正确前进方向.”

习近平总书记对于马克思的科学精神和数学成就给予高度评价:“即使在多病的晚年,马克思仍然不断迈向新的科学领域和目标,写下了数量庞大的历史学、人类学、数学等学科笔记.正如恩格斯所说:马克思在他所研究的每一个领域,甚至在数学领域,都有独到的发现,这样的领域是很多的,而且其中任何一个领域他都不是浅尝辄止.”

二、马克思《数学笔记》是马克思主义科学方法论的重要内容

马克思的《数学笔记》在人类的历史上是一笔十分宝贵的财富,这笔财富对当时那个时代的人们,对如今的我们都有着极其深远的影响.马克思在他的《数学笔记》中展示了他对数学领域,尤其是微积分相关的领域做出的深入的研究,他在函数、变量、极限、微分、积分等方面都有所涉猎,这对于一个思想家来说实属不易.马克思的《数学笔记》除了论证了数学上的许多观点外,还巧妙地运用了辩证法思想对这些观点加以佐证,辩证法思想在数学上的运用在世界数学史上不可不谓一个巨大的进步,它以不同的角度、变化的思维来认识事物,寻找世间万物之间的联系和影响,从而更好地研究数学问题,摆脱了前人对数学的“非此即彼”的认识,推动了数学极大的发展.辩证法思想和数学关系密切,辩证法思想在研究数学问题的过程中是一种具体的体现,而数学的发展则与辩证法的运用密不可分.这种辩证法思想包含了运动观、信息观、时空观、系统观等观点,并且将这些观点巧妙地进行了联系、划分、转化、交错,使它们形成了一个整体的系统观点,辩证法思想的应用不仅推动了当时数学水平的发展,更是推动了当代数学水平的发展.

作为一个思想家,在研究经济学的过程中,马克思遇到了许多和数学相关的难题,这正是他开始研究数学的起因,但慢慢地他却深深迷恋数学不可自拔.他日复一日、年复一年,在数学这片广袤的田野里耕种,才有了如今我们能够研读的《数学笔记》.马克思创作的《数学笔记》汇集了,如布沙拉、辛德、拉库阿等人的思想,并且进行了反复推敲,继而总结和升华,最终形成了自己对数学的独特看法.

为了更好地撰写《资本论》,马克思系统地学习和研究了政治经济学原理,在他学习和研究的过程中经常遇到数学问题,为了解决这些问题,他便开始了对数学的研究.正如马克思曾在写给恩格斯的信中这样说到:“在制定政治经济学原理时,计算的错误大大阻碍了我,失望之余,只好重新坐下来把代数好好地温习一遍,算术我一向很差,不过间接地用代数方法,我很快又计算正确了”.

马克思在《数学笔记》中对数学的研究与经济学研究紧密结合.在研究经济学问题时,

他充分利用数学的思想解决经济学问题,他曾在写给恩格斯的信中提到:“工资第一次被描写为‘隐藏在它背后的一种关系的不合理的表现形式’,这一点通过工资的两种形式,即计时工资和计件工资得到了确切的说明(在高等数学中常常可以找到这些公式,这对我很有帮助).”从这点可以看出马克思对数学的兴趣是由于他想把数学运用到经济学中而产生的.马克思也曾经说过:“一门学科,只有当它达到能够成功地运用数学时,才算是真正地发展了”.

三、马克思创作《数学笔记》的灵感来源

19世纪60年代后,马克思研究了大量的微积分方面的书籍,如布沙拉、辛德、拉库阿等人撰写的著作.在研究中,马克思深深感到了数学的魅力所在,所以便产生了对数学,尤其是微积分领域的深入思考.之后,马克思便开始对微分、泰勒定理、导函数概念等数学问题的研究,并且撰写了一些著作.

马克思把微分学看作是一种在科学上的新发现,他经常在思索微分学和经济学之间的联系,目的是为了更好地了解经济学.在研究过程中,他对微分学有了非常生动而富有哲理的论述.

马克思曾经把微分学的约一百多年的发展分为三个阶段,分别是牛顿的“神秘微分学”阶段、莱布尼茨的“理性微分学”阶段和拉格朗日的“纯代数微分学”阶段.

在学习和研究微积分学的过程中,马克思遇到了很多困难,但是他并没有气馁,而是采用了辩证法来研究问题,最终成功地解决了这些问题,从而进一步深入理解了微积分这门学科.例如:在研究微积分中“极限”这一概念时,马克思通过阅读各种与之相关的教材,运用辩证法的观点,向世人证明了微积分学的博大精深.也许从现在世人对微积分学的认识来看,这些内容简单易懂,但在当时这却是马克思为探索微分学而做出的历史性的努力.

通过运用辩证法来研究微分问题便也成为了马克思创作《数学笔记》的重要灵感来源.

四、剖析微积分概念定理及经济学中蕴含的辩证唯物主义思想

高等数学的主要内容是微积分,在微积分概念和定理中蕴含了丰富的辩证数学思想,如数学范畴(常量与变量、有限与无限、离散与连续、直线与曲线、线性与非线性、近似与精确、随机性与确定性、正运算与逆运算等)的对立统一、普遍联系相互制约、量变质变、否定之否定、数学化归、极限(无限逼近)思想.

马克思认为,数学是建立辩证唯物主义哲学的一个重要基础,所以他把对数学的研究当作是一种丰富辩证思维的不竭动力.通过多年来对数学的学习和研读,他认为,他已经在数学中找到了形式最简单并且最符合逻辑的辩证运动.恩格斯曾经这样说到:“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾,在一定条件下直线和曲线应该是一回事”.

基于习近平新时代中国特色社会主义思想科学方法论和马克思《数学笔记》,微积分中辩证思想的具体体现是研究在一定条件下,使微积分中直与曲、常量与变量、有限与无限、局部与整体、近似与精确、特殊与一般、离散与连续、对立与统一、量变与质变、否定与肯定等基本矛盾的对立面相互转化.

同时,用辩证唯物主义的理论来分析和解决经济问题(表1),不仅可以准确地把握问题的实质,使学习和研究问题更加深入,还能提高和发展辩证思维能力,形成良好的科学的

思维方式。

极限思想中包含了变与不变、过程与结果、有限与无限、近似与精确、量变与质变以及否定与肯定的对立统一。在微积分中,处处存在着对立统一的概念。例如:常量与变量、有限与无限、局部与整体、近似与精确、微分与积分等,其中微分与积分自始至终贯穿于整个高等数学中,而微积分学基本定理揭示了微分和积分的内在联系,是它们由对立走向统一的桥梁。又如:无穷小量与无穷大量是对立的,也是统一的,两者之间可以通过倒数运算实现相互转换。由罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理组成的微分中值定理是微分学的理论基础,它们之间既有联系,又有区别,是一个由浅入深,由特殊到一般,逐步完善的过程。它们反映了人们认识客观世界的普遍规律,它们之间的关系体现了哲学中的特殊与一般的辩证统一关系。曲边梯形面积的计算,是先通过无限细分曲边梯形,然后用小矩形面积近似代替对应的小曲边梯形面积累加得到。这样一个先通过部分得到整体,以不变代替变化,然后在无限变化的过程中实现近似转化为精确的结果,深刻反映了近似与精确、部分与整体、有限与无限的辩证统一关系。

表 1 经济学中蕴含的辩证唯物主义思想

微积分理论	经济学应用	辩证法思想
函数图像	供应图与需求图	对立统一
导数	边际利润与成本、弹性分析	变与不变、过程与结果、有限与无限、近似与精确、量变与质变
极值问题	利润最大化、成本最小化、征税问题	整体与局部
积分	基尼系数、消费剩余与生产者剩余	近似与精确、部分与整体、有限与无限
无穷级数	市场经济中的蛛网模型、乘数效应	有限与无限、近似与精确、量变与质变
差分方程	人口增长的 Logistic 模型	连续与离散

1.2 高等数学中的数学文化与价值

文化兴则国运兴,文化强则民族强。习近平总书记指出:“一个国家、一个民族的强盛,总是以文化兴盛为支撑的,中华民族伟大复兴需要以中华文化发展繁荣为条件。对历史文化特别是先人传承下来的道德规范,要坚持古为今用、推陈出新,有鉴别地加以对待,有扬弃地予以继承。”党的十八大以来,以习近平同志为核心的党中央把文化建设提升到一个新的历史高度,把文化自信和道路自信、理论自信、制度自信并列为中国特色社会主义“四个自信”。我国的文化建设在正本清源、守正创新中取得了历史性成就、发生了历史性变革,为新时代坚持和发展中国特色社会主义、开创党和国家事业全新局面提供了强大正能量。根据党的二十大报告中关于中华优秀传统文化、增强文化自信的论述,所以在高等数学课程中要不断推进社会主义文化强国建设,坚持守正创新、坚定文化自信,博大的开放气度,始终坚持人民至上的政治立场。

一、凝练数学文化,实现数学文化与创新精神同频共振

高等数学属于自然科学,课程思政隶属人文社会科学,将思政教育融入高等数学课程

中,是数学教育与德育教育相结合地体现,实现了自然科学与人文社会科学的相互交叉.我国的人文社会科学兼顾自然科学方面的研究,起始于南开大学顾沛教授.从2001年开始,顾沛教授开设全国第一门数学文化课,着重传授数学思想,并将自然科学和人文素质教育结合起来.

微积分是数学发展史上最重要的科学理论之一,它有着深厚的数学文化背景,凝聚了众多数学家的思想和智慧.当代数学分析权威R.柯朗曾经说过:“微积分乃是一种震撼人心灵的智力奋斗的结晶.”微积分作为高等数学的基础理论,它处于自然科学与人文科学之间的地位.这门科学是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶;这种奋斗经历了两千五百多年之久,它深深扎根于人类活动的许多领域,并且只要人类认识自己和认识自然的努力一日不止,这种奋斗就将继续下去.可以说,一部微积分的发展史,就是一部人类进步的文化史.

数学理论优美深刻,是全人类的共同财富.数学文化是优秀文化,美国当代数学家、教育家克莱因指出:“数学一直是一种重要的文化力量,具有极其重要的实用价值,在使人赏心悦目和提供审美价值方面,至少可以与其他任何一种文化门类媲美.”数学是一种先进的文化,数学教学体现了素质教育的精神,为数学教学与课程思政的融合创造了条件.当代数学史上有很多辈数学家追求真理、攻坚克难、兢兢业业的励志故事,他们厚植爱国主义情怀、扎根于中国土地,创造出了世界一流的数学成果.

以华罗庚先生为例.1936年华罗庚前往英国剑桥大学学习,抗日战争期间回到灾难深重的祖国,并在昆明的一个吊脚楼上写出了堆垒数论.1950年他放弃了美国优越的生活条件和良好的研究环境,克服重重困难回到祖国怀抱,投身我国数学教育和研究事业.归途中,他写了一封致留美学生的公开信,信中说:“为了抉择真理,我们应当回去;为了国家民族,我们应当回去;为了为人民服务,我们应当回去;就是为个人出路,也应当早日回去,建立我们工作的基础,为我们伟大祖国的建设和发展而奋斗!”华罗庚凭借自己的智慧和巨大的影响力,为中国数学事业的发展做出了巨大的贡献,被誉为“人民的数学家”.

在世界数学发展史上,也不乏信念坚定、砥砺奋斗的感人例子.例如:陈景润先生凭借其对于数学的热爱和坚强的毅力,克服种种困难,在十分艰苦的条件下攻克了世界著名数学难题“哥德巴赫猜想”中的“ $1+2$ ”,发表了题为《大偶数表为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和》的学术研究论文.该研究成果震撼全世界,成为研究“哥德巴赫猜想”发展史上的里程碑.

数学文化蕴含着创新意识与创新精神,这也是一流数学人才必须具备的.在我国数学发展史上,刘徽开创了“割圆术”探索圆周率的精确方法,祖冲之在此基础上运用开幂法,实现了创新与突破,并首次将“圆周率”精算到小数第七位,即在3.1415926和3.1415927之间.这是对中国乃至世界数学研究的重大贡献,使得当时中国的数学研究水平领先世界近千年.南宋数学家秦九韶的《数书九章》,标志着世界数学在中世纪达到的最高水平.他始创“大衍求一术”(求解一次同余式组的算法),在数学界被冠以“中国剩余定理”;他提出的“正负开方术”(高次方程求正根法),则称为“秦九韶算法”.

二、数学文化的特征与辐射

习近平总书记指出:“中华民族创造了源远流长的中华文化,中华民族也一定能够创造出中华文化新的辉煌.独特的文化传统,独特的历史命运,独特的基本国情,注定了我们必

然要走适合自己特点的发展道路。对我国传统文化,对国外的东西,要坚持古为今用、洋为中用,去粗取精、去伪存真,经过科学的扬弃后使之为我所用。”

数学作为一种文化,除具有文化的某些普遍特征外,还有区别于其他文化形态的独有特征:数学符号语言的简洁性,数学思维方法的独特性(抽象思维、逻辑思维、形象思维、直觉思维)、数学之美的高雅性(简洁性、和谐性、统一性、奇异性),数学精神的深刻性,数学发展的时代性。

下面从数学与文学、数学与史学、数学与经济、数学与语言、数学与高科技等方面阐述数学文化的特征与辐射。

1. 数学与文学

数学与文学的联系源远流长,其中数学与文学的思考方法往往是相通的。比如:数学里有“对称”,文学中则有“对仗”。对称是一种变换,变换后却有些性质保持不变。轴对称是依对称轴对折图形的形状和大小都保持不变。那么对仗是什么?无非是上联变成下联,但是字词句的某些特性不变,王维诗云“明月松间照,清泉石上流”,这里明月对清泉都是自然景物没有变,形容词“明”对“清”,名词“月”对“泉”,词性不变,其余各词均如此。

运用数学研究《红楼梦》也是一个很好的例子。1980年6月在美国威斯康星大学召开的首届国际《红楼梦》研讨会上,美籍华裔学者陈炳藻宣读了论文《从词汇统计论〈红楼梦〉的作者》。

更令人吃惊的是,有人把数学、物理中的谱频分析概念与快速傅里叶变换密切联系,并成功地运用于文学研究。文学作品的微量元素,即文学的“指纹”,就是文章的句型风格,其判断的主要方法是谱频分析。日本有的专家利用谱频分析,随意挑选一段文字,不讲明作者,经过分析后就可以准确判断是谁的作品。

2. 数学与史学

把数学方法引入到史学研究中,就产生了一门新学科——史衡学。由于数学方法的引进,开拓了史学研究的新领域,同时使加工、整理更科学化、准确化。数学的介入,排除了较多的人为主观因素。近年来,网络新媒体、数字化的出现,更为史学研究添虎翼之功。

3. 数学与经济

数学与经济学可以说密不可分,以至于在今天不懂数学就无法研究经济。当今世界,人们需要运用数学建立经济模型,寻求经济管理中的最佳方案,运用数学方法组织、调度、控制生产过程,从数据处理中获取经济信息等,使得代数学、分析学、概率论和统计数学等大量数学的思想方法进入经济学领域,并反过来促进了数学科学的发展。今天,一位不懂数学的经济学家是决不会成为一位杰出经济学家的。1969—1981年13位诺贝尔经济学奖的获得者中,有7位获奖者是其杰出的数学工作起了主要作用。其中苏联数学家坎托罗维奇因对物资最优调拨理论的贡献而获1975年诺贝尔经济学奖,他也被公认为现代经济数学理论的奠基人。Klein因“设计预测经济变动的计算机模式”而获1980年诺贝尔经济学奖。Tobin因“投资决策的数学模型”而获1981年诺贝尔经济学奖。Debreu获1982—1983年诺贝尔经济学奖,而他的主要工作都反映在数学上。

4. 数学与语言

法国数学家阿达马曾经说过,语言学是数学和人文科学之间的桥梁。数学与语言学的结合非常密切,包括产生了新兴的学科——数理语言学、计算语言学,把演绎方法引入语言

学,建立了代数语言学,特别是借助计算机,对语言进行整理和编撰辞书都已经比较普遍.

5. 数学与高科技

数学与高科技的相互渗透,在今天已经非常广泛和深刻.作为高新技术的应用科学,其基础就是数学,高科技在本质上是一种数学技术和数学应用较为密切的高技术领域,如现代能源科学、航空航天技术、空间科学、遥感技术、生命科学、人工智能、微电子技术、系统科学、现代通信技术、芯片技术等.其实各行业都有各自的高技术领域,但它们与数学往往密切相关.

1.3 数学中的中国传统文化

本节将介绍中华民族古代数学取得的光辉成就.习近平总书记指出:“中华民族具有5000多年连绵不断的文明历史,创造了博大精深的中华文化,为人类文明进步做出了不可磨灭的贡献.经过几千年的沧桑岁月,把我国56个民族、13亿多人紧紧凝聚在一起的,是我们共同经历的非凡奋斗,是我们共同创造的美好家园,是我们共同培育的民族精神,而贯穿其中的、更重要的是我们共同坚守的理想信念.”

一、中国古代光辉的数学成就

数学是一切科学技术发展的基础,素有“科学之王”的美誉.在中国历史上,中华民族以非凡的勤劳和智慧,在古代数学王国里耕耘拼搏,创造了世界第一流的研究成果.中国传统数学曾长期在世界上领先.中国在约1800年间是数学大国,在约1600年间是数学强国.可以说,在世界文明的长河中,中国的数学研究大约有三分之一的时间居于世界领先地位.

从《周髀算经》《九章算术》以及2000年公布的《算数书》来看,战国时期(公元前475—前221年)数学已相当发达.中国战国时期的数学与古希腊的数学东西辉映.大约在《九章算术》编定时(公元1世纪左右)中国取代了古希腊成为世界数学研究的中心.实际上,从中国成为数学大国起有三次大的发展高潮.

中国传统数学的第一个发展高潮发生在战国至西汉时期.其标志是《算数书》《周髀算经》《九章算术》.《九章算术》是中国传统数学最重要的经典著作,它使中国传统数学在分数四则运算、比例和比例分配算法、盈不足算法、开平方法与开立方法、线性方程组解法、正负数加减法则、解勾股形和勾股数组等方面都走在了世界的前列.《九章算术》奠定了中国传统数学的基本框架.

中国传统数学的第二个发展高潮发生在魏晋南北朝时期.其标志是刘徽的《九章算术注》(公元263年)和祖冲之(429—500年)的数学成就.受当时辩难之风的影响,刘徽以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的公式解法,奠定了中国传统数学的理论基础.刘徽在圆面积公式和“刘徽原理”的证明中,在世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明;首创了求圆周率精确近似值的科学方法,在开方不尽时提出用“微数”,即十进分数逼近无理根的方法,奠定了中国圆周率计算领先世界千余年的基础;“刘徽原理”将多面体体积理论建立在无穷小分割基础之上,实际上已经开始探讨希尔伯特第三问题(1900年).祖冲之将圆周率精确到8位有效数字并提出密率 $355/113$,领先世界千年左

右.他和他的儿子(祖暅之)还在“刘徽原理”的基础上提出“祖暅之原理”,彻底解决了球体问题.

中国传统数学的第三个发展高潮发生在宋元时期.其主要有两个方向:第一个方向是
高深数学的研究.许多著作已经失传,现存重要的有:北宋贾宪(11世纪上半叶)撰《黄帝九
章算经细草》,进一步抽象《九章算术》的算法,创造“开方作法本源”(贾宪三角)和“增乘开
方法”,奠定了宋元数学高潮的基础.南宋秦九韶(约1202—1261年)撰《数书九章》(1247
年),提出“大衍总数术”,完善了一次同余式组解法,并把以增乘开方法为主导的高次方程
数值解法发展到十分完备的程度.金元李冶(1192—1279年)撰《测圆海经》(1248年)、《益
古演段》(1259年),其集此前勾股容圆知识之大成,同时完善了设未知数列方程的方法“天
元术”.元朱世杰撰《算学启蒙》(1299年)、《四元玉鉴》(1303年),提出“四元术”,即多元
高次方程组解法,并在沈括(1031—1095年)、杨辉(13世纪)、王恂(1235—1281年)、郭守
敬(1231—1316年)等的基础上将高阶等差级数求和问题和高次招差法发展到相当完备的
程度.这些成就大多超前于西方文明几个世纪,有的问题是欧洲17—19世纪的数学大师才
开始解决的.第二个方向是自唐中叶起随着商业发展的需要,改进筹算的乘除捷算法,导致
了珠算盘的产生.珠算盘在明代最终取代了算筹,完成了计算工具的改革.至今在中国、日
本和东南亚地区人们的生产、生活中珠算都发挥着重要的作用.到目前为止,《四元玉鉴》
是中国传统数学现存水平最高的著作.

极限是高等数学重要概念之一,贯穿微积分的发展,是微积分的灵魂.刘徽发明的割圆
术利用圆内接正多边形来推算圆面积,是极限思想在几何应用深刻的论述,奠定了他在微积
分历史上的不朽地位;庄子提出“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,暗含了朴素的无穷思想
和极限思想.从他们可以了解中国古人伟大的智慧和创造,激励我们树立“文化自信”.

二、中华民族命运共同体——中国古代著名数学家简介

在中华民族的历史上涌现出了很多世界级的数学家.习近平总书记指出:“我国56个
民族共同构成了你中有我、我中有你、谁也离不开谁的中华民族命运共同体.中华文明由中
国各民族共创共传共享,形成了悠久的民族共同体传统,充分体现了鲜明的民族和谐交往
之道.”

1. 刘徽的数学成就

在《隋书·律历志》中提到“魏陈留王景元四年刘徽注九章”,由此可以知道刘徽是公元
3世纪魏晋时人,并于公元263年(景元四年)撰《九章算术注》.《九章算术注》包含了刘徽
本人的许多创造,完全可以看成是独立的著作,奠定了这位数学家在中国数学史上的不朽
地位.

刘徽数学成就中最突出的是“割圆术”和体积理论.

2. 祖冲之和祖暅之

祖冲之(429—500年),字文远,范阳郡道县(今河北省涞水县)人,南北朝时期杰出的
数学家、天文学家.其一生钻研自然科学,主要贡献在数学、天文历法和机械制造三方面.他
在刘徽开创的探索圆周率的精确方法的基础上,首次将“圆周率”精算到小数第7位,即在
3.1415926和3.1415927之间,他提出的“祖率”对数学的研究有重大贡献.直到16世纪,阿

拉伯数学家阿尔·卡西才打破了这一纪录.祖冲之因此入选世界纪录协会的世界第一位将圆周率值计算到小数第7位的科学家.祖冲之还给出圆周率(π)的两个分数形式:22/7(约率)和355/113(密率),其中密率精确到小数第7位.祖冲之对圆周率数值的精确推算值,对于中国乃至世界是一个重大贡献,后人将“约率”用他的名字命名为“祖冲之圆周率”,简称:“祖率”.由他撰写的《大明历》是当时最科学最进步的历法,对后世的天文研究提供了正确的方法.其主要著作有《安边论》《缀术》《述异记》《历议》等.

祖暅(456—536年),一作祖暅之,字景烁,范阳道县(今河北涿水)人,南北朝时期数学家、天文学家,祖冲之之子.他与祖冲之一起圆满解决了球面积的计算问题,得到正确的体积公式,并据此提出了著名的“祖暅原理”.祖暅与祖冲之总结了魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作,提出“幂势既同则积不容异”,即等高的两立体,若其任意高处的水平截面积相等,则这两立体体积相等,这就是著名的祖暅公理(或刘祖原理).祖暅应用这个原理,解决了刘徽尚未解决的球体积公式.该原理在西方直到十七世纪才由意大利数学家卡瓦列利(Bonaventura Cavalieri)发现,比祖暅晚一千一百多年.

3. 贾宪和杨辉

贾宪是中国十一世纪上半叶(北宋)的杰出数学家,曾撰《黄帝九章算法细草》(九卷)和《算法古集》(二卷),都已失传.据《宋史》记载,贾宪师从数学家楚衍学天文、历算,著有《黄帝九章算法细草》《释锁算书》等书.此外,“立成释锁开方法”的给出、“勾股生变十三图”的完善,以及“增乘方求廉法”的创立,都表明贾宪对算法抽象化、程序化、机械化做出了重要贡献.贾宪著作已佚,但他对数学的重要贡献被南宋数学家杨辉引用,得以保存下来.

杨辉著《详解九章算法》(1261年)中曾引用贾宪的“开方作法本源”图(指数为正整数的二项式展开系数表,现称:“杨辉三角形”)和“增乘开方法”(求高次幂的正根法).“杨辉三角形”比帕斯卡(1623—1662年)的求解三角形方法早600年,“增乘开方法”比霍纳(1786—1837年)的求解三角形方法(1819年)早770年.

4. 秦九韶

秦九韶(1208—1268年),字道古,祖籍鲁郡(今河南省范县),出生于普州(今资阳市安岳县),南宋著名数学家.其与李冶、杨辉、朱世杰并称宋元数学四大家.他在1247年完成著作《数书九章》,其中的大衍求一术(一次同余方程组问题的解法,也就是现在所称的中国剩余定理)、三斜求积术和秦九韶算法(高次方程正根的数值求法)是具有世界意义的重要贡献,表述了一种求解一元高次多项式方程的数值解的算法——正负开方术.

《数书九章》是对《九章算术》的继承和发展,概括了宋元时期中国传统数学的主要成就,标志着中国古代数学的高峰.当它还是抄本时就先后被收入《永乐大典》和《四库全书》.秦九韶的成就也代表了中世纪世界数学发展的主流与最高水平,在世界数学史上具有崇高的地位.美国著名科学史家萨顿称秦九韶“他是那个民族、他那个时代,并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”.

5. 明安图

明安图(1692—1765年),字静庵,清代杰出的数学家、天文历法学家和测绘学家,是中国古代少有的多学科科学家之一.他学识渊博,研究领域广泛,不仅在数学研究中有重大突

破,而且在天文历法、地图测绘等方面都做出了巨大贡献.明安图在研究工作中运用了严密的逻辑推理,这在中国古代数学史上是罕见的.他一共提出了九个基本方程,列出三角函数和反三角函数的幂级数表达式,并且计算出展开式的各项系数,为三角函数和反三角函数的解析研究开辟了新的途径.明安图在数学研究上的丰硕成果在中国数学史上具有重要地位,被清朝学者称为“明氏新法”“弧矢不祧之祖”.他在数学上的贡献对中国近代数学的发展产生了深远的影响.